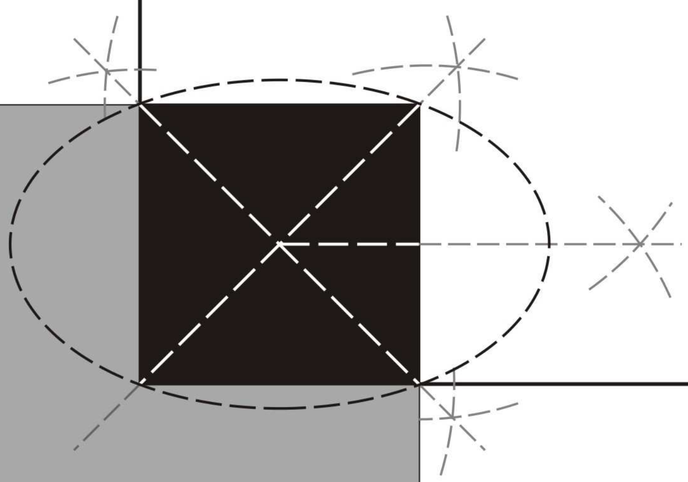
DESSIN SCIENTIFIQUE

TOME 4



C . B R I S O N

CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES

Préface - v.01.1

Ce livre est un manuel scolaire qui reprend toute la matière ayant trait aux constructions géométriques
En principe, cela reprend la matière des 4ème, 5ème et 6ème années du secondaire (technique de transition ou technique de qualification)

La liste des constructions reprises dans ce fascicule n'est pas exhaustive.

Les conventions du dessin technique sont données dans le fascicule d'Introduction.

Droits d'auteur, licence et restrictions

Table des matières

I. Petit lexique

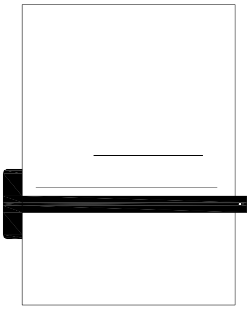
- Amplitude d'un angle : Valeur d'un angle en degrés.
- Angle aigu : angle de moins de 90° d'amplitude.
- Angle droit : angle de 90° d'amplitude.
- Angle obtus : angle de plus de 90° d'amplitude.
- Apothème : droite qui relie le sommet d'une pyramide régulière au milieu d'un côté de sa base.
- Bissectrice : la bissectrice est une droite qui divise un angle en deux parties égales.
- Circonférence : contour d'un cercle (= $2\pi R$)
- Diamètre : distance entre deux points opposés de la circonférence d'un cercle sachant que le diamètre passe par le centre du cercle.
- Droites confondues ou plans confondus : droites ou plans qui ont tous leurs points en commun.
- Droites sécantes : droites qui se coupent en un point.
- Génératrice : droite dont le déplacement engendre une surface réglée (un cylindre ou un cône).
- Horizontale : droite ou plan dont tous les points sont à la même hauteur.
- Médiatrice : droite perpendiculaire à un segment, passant par le milieu de celui-ci.
- Parallèles : droites ou plans qui n'ont aucun point en commun.
- Perpendiculaires : droites ou plans qui forment un angle droit entre eux.
- Pistolets (curvigraphe) : lattes arrondies qui permettent de tracer des arcs. Le jeu complet de pistolets comprend 3 lattes.
- Polygone régulier : Forme fermée de 3, 4, 5, 6,... côtés égaux.
- Rayon : Distance entre le centre et la circonférence d'un cercle.
- Tangente : droite qui touche un cercle sans le couper.
- Té : Instrument de dessin, en forme de T, qui permet de tracer des droites parallèles entre elles.
- Verticale : droite qui suit la direction du fil à plomb.

II. Tracé aux instruments

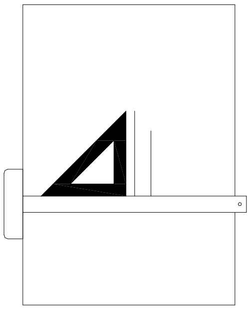
Le tracé géométrique demande une certaine dextérité dans la manipulation des instruments de dessin et des méthodes de construction. L'utilisation du Té et des équerres est requise pour assurer un travail précis et rapide.

1. Tracés de droites et segments de droites particuliers

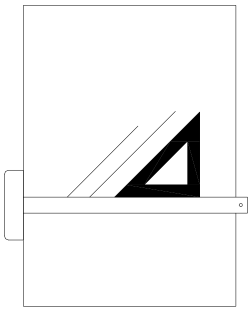
Les droites horizontales se tracent au Té. Celui-ci coulisse sur le bord gauche de la planche de dessin.



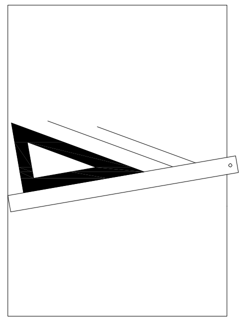
Les droites verticales se tracent avec une équerre qui coulisse sur le Té.



Les droites à 45° se tracent avec une équerre à 45° qui coulisse sur le Té, dans un sens ou dans l'autre.



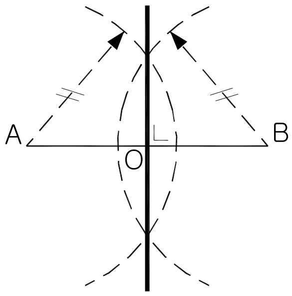
Les parallèles se tracent à l'équerre (au choix) qui coulisse sur une latte maintenue fermement sur le support.



2. Divisions d'angles

2a. Médiatrice

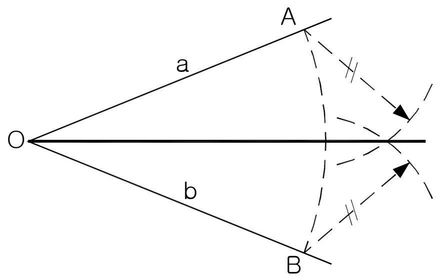
<u>Médiatrice de AB</u> :
prendre le compas, rayon plus grand que ½ AB, tracer un arc de cercle de centre A puis de centre B.
Les intersections de ces deux arcs de cercle donnent deux points de la médiatrice.



NB : Une médiatrice est une bissectrice d'un angle de 180°.

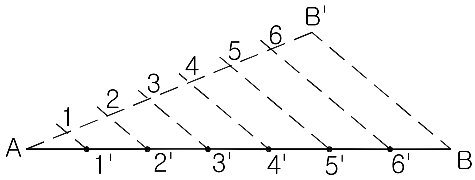
2b. Bissectrice

<u>Bissectrice de aOb</u> :
prendre le compas, ouverture quelconque de centre O, tracer un arc jusqu'aux droites a et b, on obtient les points A et B.
Tracer un arc de cercle de centre A (rayon plus grand que ½ AB).
Idem avec B, en gardant le même rayon.
L'intersection des deux arcs de cercles obtenus donne un des points de la bissectrice.
Le centre O en est un deuxième.



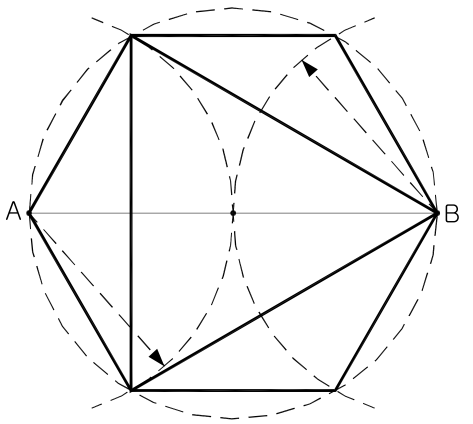
3. Division de segment

<u>La division du segment AB en n parties égales</u> :
Du point A, tracer un segment de droite facilement divisible en n, on obtient AB' et les points de divisions 1, 2, 3, …
Relier les extrémités B et B', on obtient une droite BB'.
Tracer des parallèles à BB' passant par les points de divisions 1, 2, 3, … pour obtenir les point 1', 2', 3',… qui sont les points de division n sur AB.



4. Construction de polygones réguliers

4a. Le triangle (3 côtés) et l'hexagone (6 côtés)

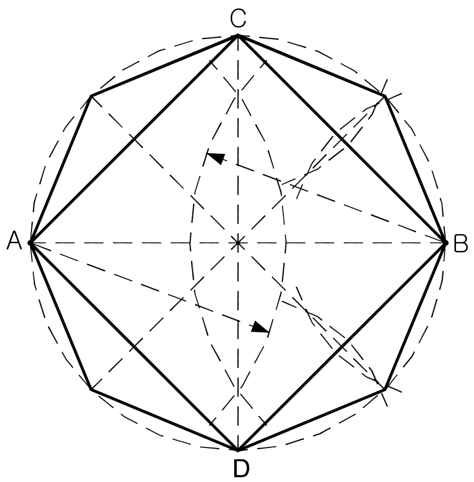


L'hexagone a 6 côtés qui ont la même longueur que le rayon du cercle dans lequel il s'inscrit.

Pour dessiner un hexagone :
Prendre un compas, ouverture égale au rayon du cercle. Mettre la pointe sèche sur un point du cercle (A) et tracer un arc.
Mettre la pointe sèche sur le point du cercle opposé au premier (B) et tracer un arc.
Les arcs de cercles ainsi tracés viennent couper le cercle aux sommets de l'hexagone.

Pour tracer un triangle (équilatéral), construire un hexagone et garder un point sur deux.

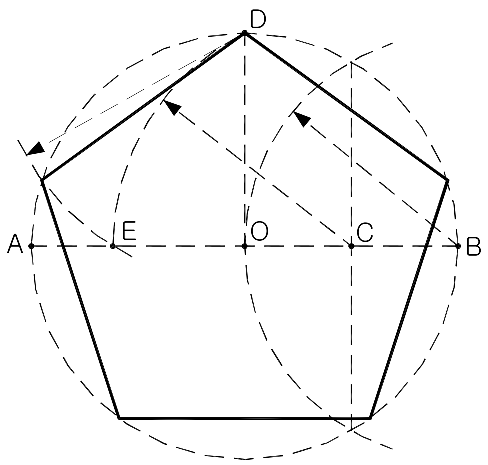
4b. Le carré (4 côtés) et l'octogone (8 côtés)



Pour dessiner un carré :
Tracer une médiatrice CD de AB jusqu'à la circonférence du cercle.
L'intersection de cette droite avec le cercle (C, D) et les deux points de départ (A, B) sont les sommets du carré.

Pour tracer un octogone, tracer les bissectrices des quatre angles droits, formés par l'intersection de AB et de la médiatrice CD, afin d'obtenir le double des sommets.

4c. Le pentagone (5 côtés)



Pour dessiner un pentagone :
Tracer un diamètre horizontal (AB) qui passe par le centre du cercle (O)

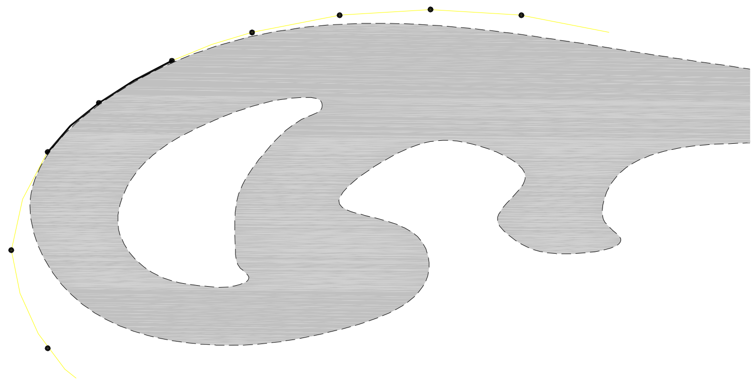
Prendre un compas, d'une ouverture égale au rayon du cercle. Mettre la pointe sèche sur un point du cercle (B) et tracer un arc.
Joindre les deux intersections de cet arc avec le cercle pour trouver le point C sur l'horizontale (C est situé à la moitié de OB)

Prendre le compas, pointe sèche sur C, ouverture CD (D est sur le cercle et perpendiculaire à O), tracer un arc jusqu'à la droite AB pour obtenir le point E.

Prendre le compas, pointe sèche sur D, ouverture DE. Cette distance est égale au côté du pentagone.

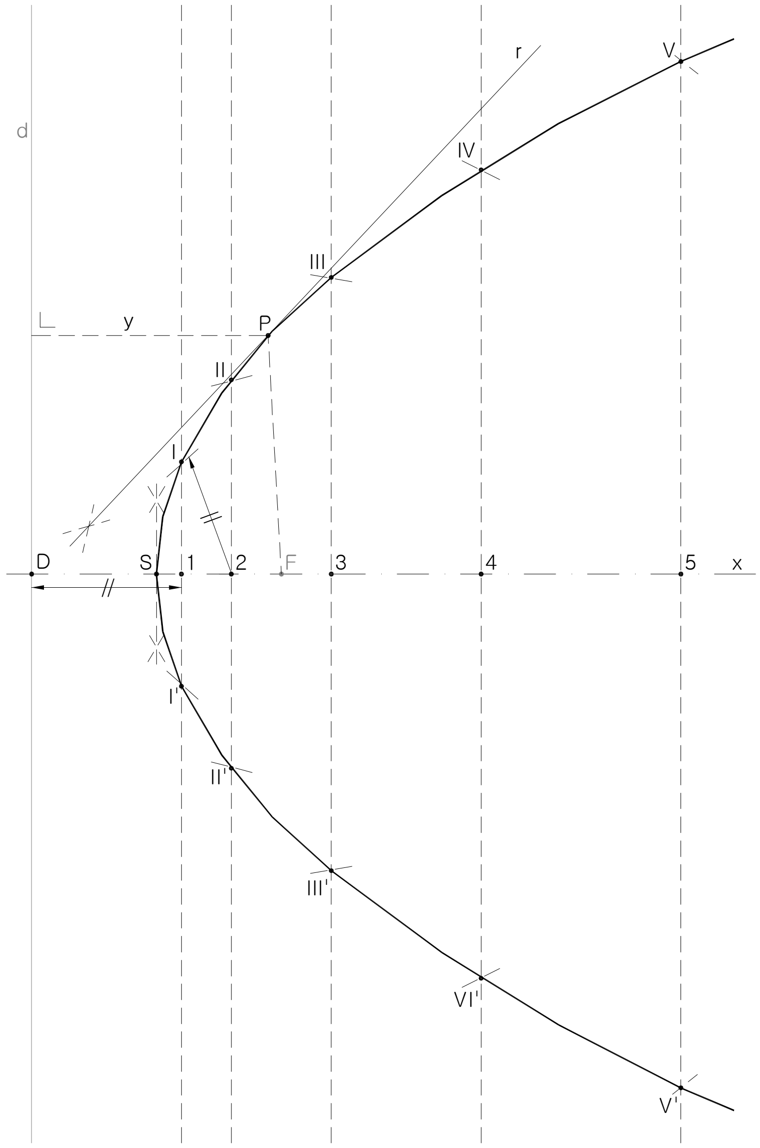
5. Tracé de courbes

Le tracé aux pistolets doit se faire par trois points tout en veillant à rester dans la direction (tangente) de la suite de la courbe. Il ne peut y avoir de rupture de la courbure (« creux » ou « bosse ») lors du tracé de la courbe.



5a. La parabole

La parabole est le lieu géométrique des points à égale distance d'une droite d (directrice) fixe et d'un point F (foyer) fixe.
Les éléments donnés sont : le foyer F et la directrice d.



Dessiner une perpendiculaire à la directrice « d », passant par le foyer F. Cette ligne représente l'axe de symétrie x de la parabole. Elle croise la directrice au point D.
Le sommet de la parabole S est le milieu de DF.
Dessiner des parallèles arbitraires à d, à droite de S. Celles-ci coupent l'axe aux points 1, 2, 3, …
Prendre la distance D1 et la reporter à partir de F sur la perpendiculaire à 1. L'intersection du compas et de la perpendiculaire donne les points I et I' de la parabole (qui sont donc, par construction, à égale distance de d et de F).
Répéter l'opération avec les points 2, 3, 4, ….

NB. : La tangente r en un point P de la parabole est la bissectrice de l'angle formé par le vecteur FP et la perpendiculaire y de P sur la directrice d.

5b. L’hyperbole

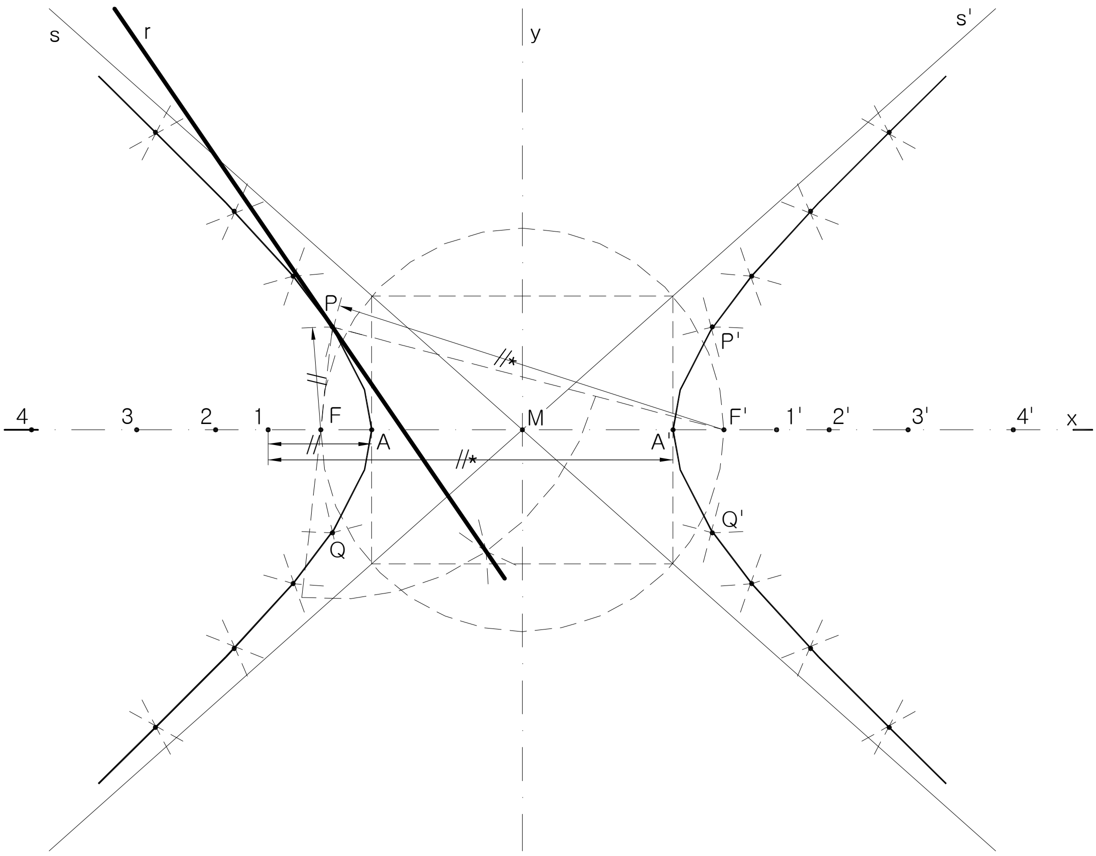
L’hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes F et F’ (foyers) est égale à une constante.
Les éléments donnés sont : Les deux foyers F et F’ et les sommets A et A’ de l’hyperbole.

1) Dessiner la droite FF’. Celle-ci donne le premier axe de symétrie principal x de l’hyperbole.
2) Dessiner la médiatrice de AA’. Celle–ci donne le deuxième axe de symétrie y de l’hyperbole. L’intersection des deux axes donne le point M.

Tracer un cercle de centre M, de diamètre FF’. En A et A’, tracer des perpendiculaires à l’axe principal. Les intersections de ces deux perpendiculaires et du cercle donnent quatre points distincts. Tracer les diagonales du carré ainsi formé afin d’obtenir les asymptotes s, s’ de l’hyperbole.

3) Fixer arbitrairement des points 1, 2, 3,… sur l’axe principal, à gauche de F.
4) Tracer un arc de cercle de centre F avec la valeur 1A comme rayon, Tracer un arc de cercle de centre F’ avec la valeur 1A’ comme rayon. L’intersection de ces deux arcs de cercle (du côté gauche de A) donne les points P et Q. Ce sont des points de l’hyperbole : par construction, la différence entre la distance de F’ à P (=1A’) et la distance de F à P (=1A) est toujours constante et égale à AA’.

Exécuter le même principe symétriquement pour obtenir les points P’ et Q’ de l’hyperbole à droite de A’.
Répéter l’opération avec les points 2, 3, 4, …



PF’- PF = 1A’ – 1A = AA’ (la différence entre les longueurs des rayons vecteurs d’un même point de l’hyperbole est toujours égale à la constante AA’).

La tangente r en un point P de l’hyperbole est la bissectrice de l’angle formé par les rayons vecteurs du point P (FP et F’P).

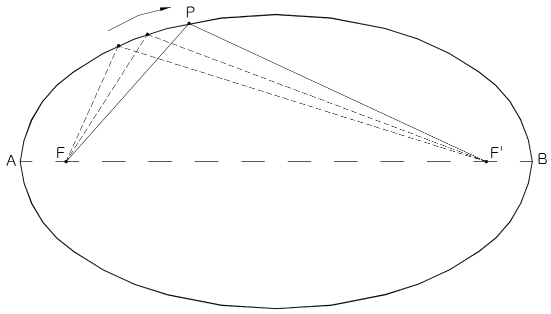
5c. L'ellipse

L'ellipse est une courbe plane fermée qui est le lieu géométrique des points d'un plan tels que la somme de leurs distances à deux points fixes, appelés foyers, est égale à une longueur constante.
Les éléments donnés sont, en général les deux axes de l'ellipse (grand axe AB et petit axe CD)
Plusieurs méthodes existent pour le tracé de l'ellipse :

1) Méthode du jardinier

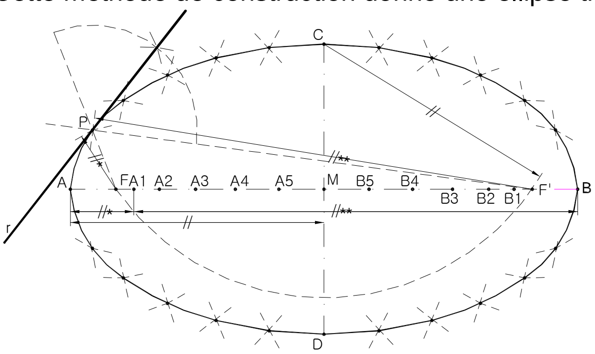
Pour tous les points de l'ellipse la somme des rayons vecteurs (ex. pour le point P : PF + PF') est égale à la longueur du grand axe AB.

Marche à suivre :
1) Planter deux piquets F et F'
2) Prendre une corde de longueur AB et les attacher aux piquets (A au piquet F et B au piquet F').
3) Tendre la corde et tracer l'ellipse en tournant autour des piquets F et F'.



2) Méthode des rayons vecteurs

Cette méthode de construction donne une ellipse très précise.



Marche à suivre :
1) Dessiner M (intersection des deux axes). Dessiner les foyers F et F' sachant que MA = MB = CF = CF'.
2) Fixer arbitrairement des points A1, A2, A3, … entre F et M, et B1, B2, B3,… entre F' et M.
3) Dessiner un arc de cercle de centre F, rayon A-A1, et un arc de cercle de centre F', rayon B-A1. L'intersection de ces deux arcs est un point de l'ellipse P (PF + PF' = A-A1 + B-A1 = A-B)
4) Répéter l'opération avec tous les points et répercuter de part et d'autre des deux axes.

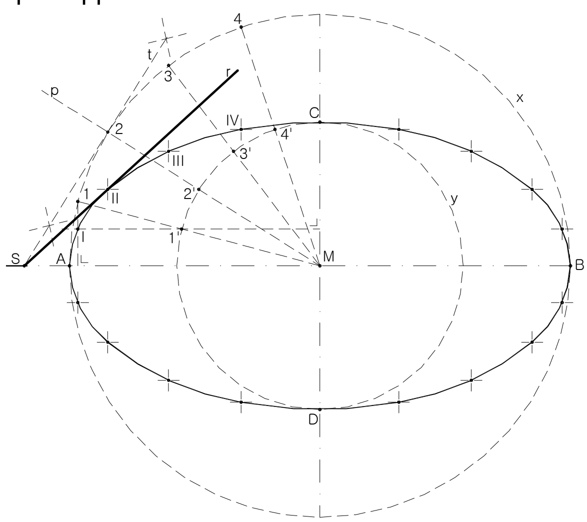
La tangente r en un point P de l'ellipse est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs de P (FP et F'P).

3) Méthode des cercles concentriques

Cette méthode de construction est plus rapide mais donne une ellipse approximative.

Marche à suivre :
1) Dessiner le point M (milieu des deux axes).
2) Dessiner un premier cercle x de centre M, diamètre AB, dessiner un deuxième cercle y de centre M, diamètre CD.
3) Fixer arbitrairement des points 1, 2, 3, … sur le grand cercle entre A et C.
4) Relier ces points au centre M, on obtient les points 1', 2', 3',… sur le petit cercle (en intersection avec les droites tracées)
5) Tracer une perpendiculaire au grand axe AB en partant du point 1. Tracer une perpendiculaire au petit axe en partant du point 1'. L'intersection entre les deux droites est un point de l'ellipse.

Répéter l'opération avec tous les points et répercuter de part et d'autre des deux axes.



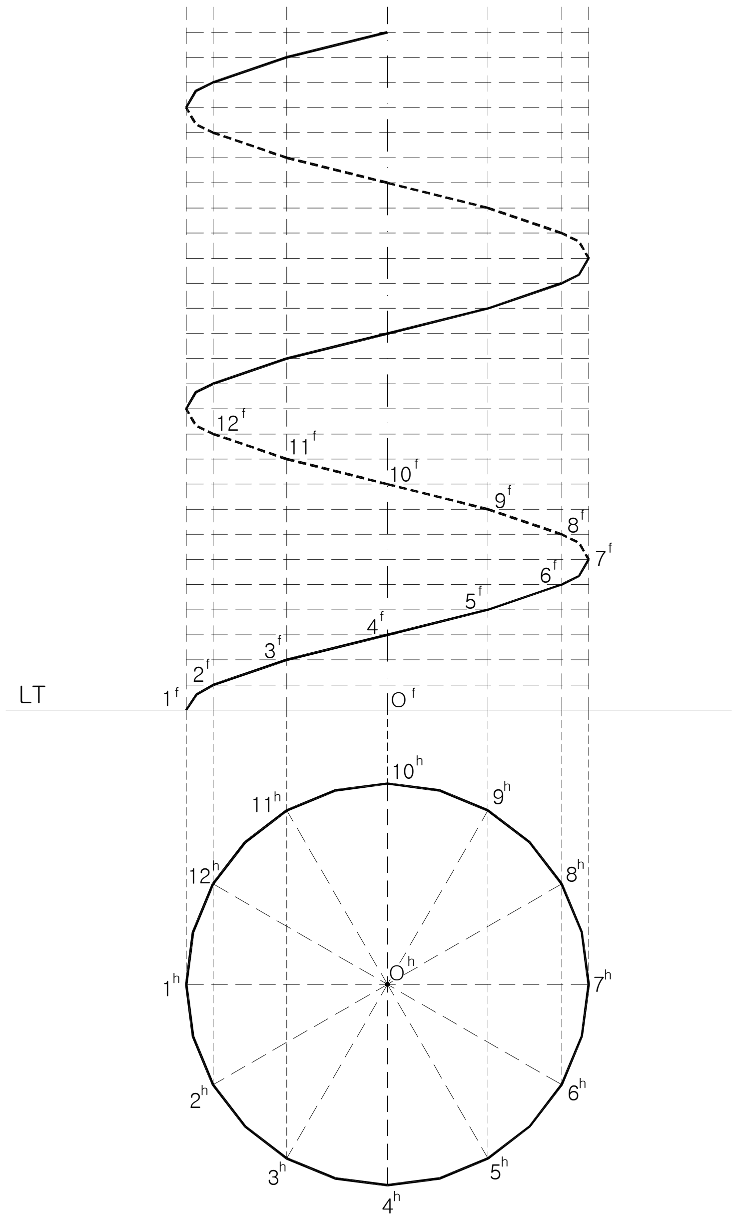
NB. : La tangente r en un point II de l'ellipse se dessine comme suit :
- Dessiner la tangente t du cercle au point 2 : relier M (centre du cercle) au point 2 pour obtenir la droite p, puis dessiner une perpendiculaire à p pour obtenir la droite t.
- Prolonger cette droite t jusqu'au grand axe AB pour obtenir le point S.
- Relier ce point S au point II et on obtient la tangente du point II.

5d. L'hélice

L'hélice est une ligne engendrée par un point qui se déplace linéairement vers le haut sur la surface latérale d'un cylindre en révolution. Une hélice tracée sur un cône s'appelle « hélice conique ».
L'hélice n'étant pas une courbe plane, on la représente en projection orthogonale.
Les éléments donnés sont : le cercle (base du cylindre), le pas (hauteur parcourue par le point pendant une révolution du cylindre) et le nombre de divisions.

Marche à suivre pour 12 divisions :

6) Partager la circonférence du cercle de la base en 12 parties égales et tracer un rayon (génératrice) pour chaque point de division (1^h, 2^h, 3^h,…)
7) Partager la hauteur du pas en 12 parties égales (même nombre de divisions que la base)
8) Le point générateur montera de $1/12^{ème}$ de la hauteur du pas et tournera en même temps de 1/12ème de tour, de sorte qu'il se placera successivement en 2, 3, 4, …

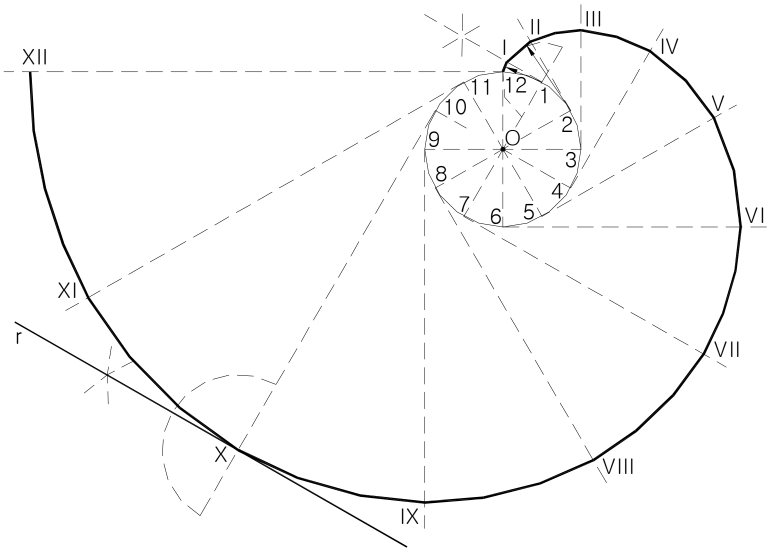


5e. La développante du cercle

La développante du cercle est une courbe plane ouverte engendrée par un point d'une droite qui tourne sans glisser sur le cercle. On peut dire que c'est une fausse spirale dont les centres, en nombre infini, se trouvent sur le cercle.
Les éléments donnés sont : le cercle de départ et le nombre de divisions du cercle.

Marche à suivre pour 12 divisions :

9) Diviser le cercle en 12 parties égales.
10) Pour chacun des douze points 1, 2, 3, …, construire la tangente à la circonférence du cercle.
11) Le point 12 est l'origine (I) de la développante. Tracer le premier arc de cercle de centre 1, passant par le point 12. Cet arc est dessiné jusqu'à sa rencontre (II) avec la tangente du point 1.
12) Le deuxième arc de cercle, de centre 2, commence à partir de la fin (II) du premier arc jusqu'à la tangente du point 2 (III). Et ainsi de suite.



Les points I-II-III… forment la développante du cercle.
Les droites 1-I, 2-II, 3-III,… sont les normales à la développante aux points I, II, III,…
La tangente r en un point X de la développante est la perpendiculaire à la normale.

Exemple : la tangente r est dessinée au point X.

5f. La spirale

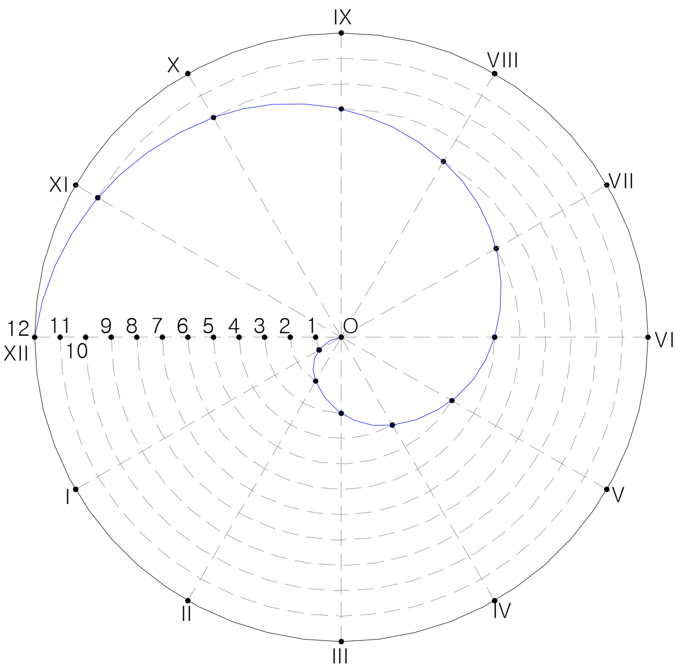
La spirale est une courbe plane engendrée par un point qui tourne autour d'un centre (pôle) en s'éloignant graduellement de celui-ci.

1) La spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède n'est pas dérivée de la longueur du cercle, on ne peut donc la tracer au compas.
Les éléments donnés sont : le cercle, le nombre de divisions (pour l'exemple : 12 divisions) et le sens de rotation.

Marche à suivre pour 12 divisions :

1) Diviser le rayon du cercle en 12 parties et annoter les points 1, 2, 3, …
2) Tracer des cercles concentriques passant par tous les points 1, 2, 3, … trouvés sur le rayon.
3) Diviser la circonférence du cercle en 12 parties et annoter les points I, II, III, ...
4) Tracer tous les rayons passant par chacun des points I, II, III, … trouvés sur la circonférence.
5) L'intersection de la première droite (O-I) et du premier cercle (1) donne le premier point de la spirale ; l'intersection de la deuxième droite (O-II) et du deuxième cercle (2) donne le deuxième point de la spirale et ainsi de suite.



2) Les fausses spirales

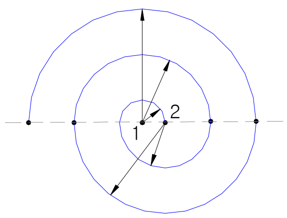
Les fausses spirales sont des courbes planes composées d'une suite d'arcs de cercles raccordés. (Exemples ci-dessous : fausses spirales à 2, 3, 4 et 6 centres)
Les éléments donnés sont : le nombre de centres et leur position.

Marche à suivre d'une fausse spirale à 2 centres:

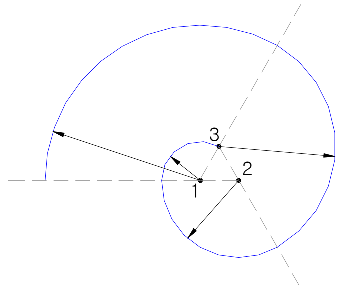
1) Dessiner une droite passant par les points 1 et 2.
2) Tracer un demi-cercle de centre 1 et de rayon 1 - 2.
3) Tracer un demi-cercle de centre 2 en prenant comme rayon 1- la fin du premier arc de cercle.
4) Continuer l'opération en prenant à chaque fois, comme centre, le point 1 puis le point 2.

NB : Tous les demi-cercles de centre 1 se trouvent du même côté de la droite 1 – 2 et tous les demi-cercles de centre 2 se trouvent de l'autre côté de la droite 1 – 2.

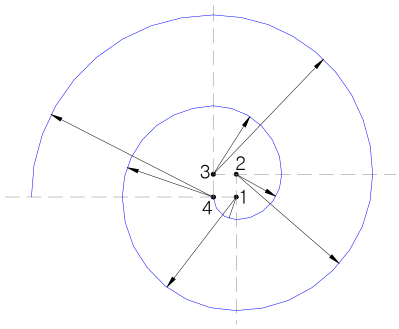
FAUSSE SPIRALE A 2 CENTRES



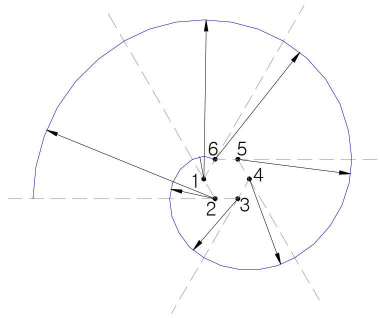
FAUSSE SPIRALE A 3 CENTRES



FAUSSE SPIRALE A 4 CENTRES



FAUSSE SPIRALE A 6 CENTRES

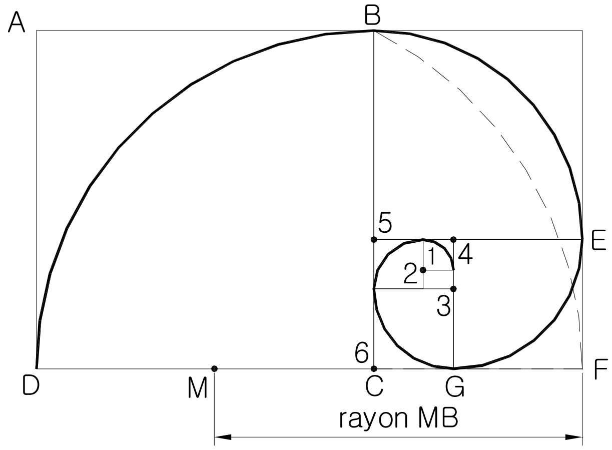


3) La spirale logarithmique du nombre d'or

La spirale logarithmique du nombre d'or est une courbe plane composée d'une suite d'arcs de cercles raccordés.
Une curviligne est tracée dans chaque carré, ajouté au plus long côté du rectangle d'or.
(Exemple ci-dessous)

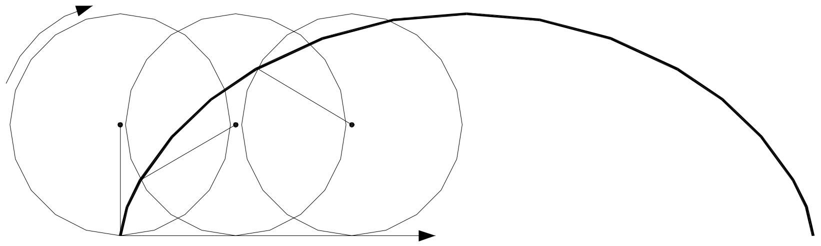
Marche à suivre :

1) On part d'un carré ABCD. L'arc de cercle DB de centre C est la première curviligne de la spirale.
2) M étant le milieu du côté CD, on trace un arc de cercle MB qui permet de trouver le point F.
3) Construire le rectangle ADFH. Le rapport entre la longueur et la largeur de ce rectangle, est le nombre d'or.
4) Construire le carré BHE5. L'arc de cercle BE de centre 5 est la deuxième curviligne de la spirale.
5) Continuer l'opération



5g. La cycloïde

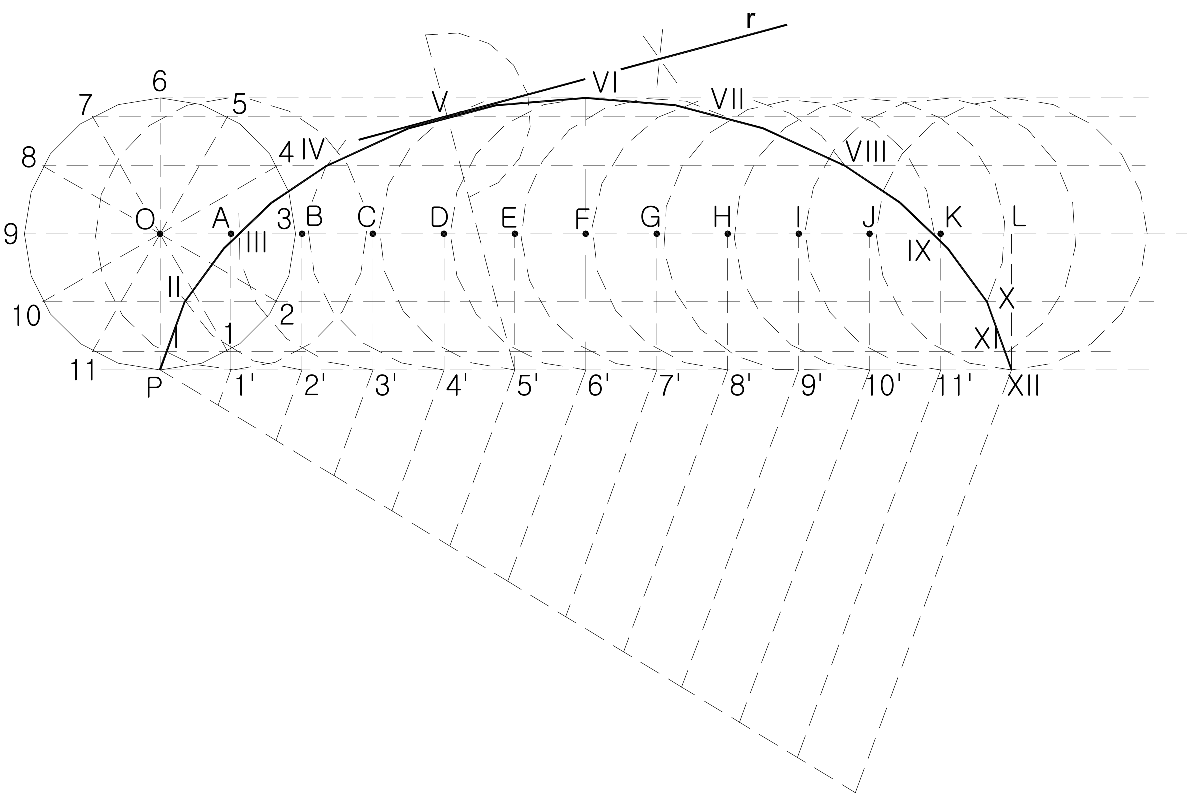
La cycloïde est la courbe plane décrite par un point d'un cercle, appelé cercle générateur, qui roule sur une droite appelée directrice ou chemin de roulement.
Les éléments donnés sont : la directrice (chemin de roulement) et le cercle directeur.



Marche à suivre :

13) Diviser le cercle générateur en 12 parties égales (1, 2, 3…)
14) A partir de P (point commun de départ entre le cercle et la directrice), tracer une droite de la longueur du cercle (2 * pi * R)
15) Diviser cette mesure en 12 parties égales 1', 2', 3', …(voir II.1 Divisions de segments)
16) Par les points 1, 2, 3, … tracer une série de droites parallèles au chemin de roulement (horizontale P-12').
17) Tracer une parallèle au chemin de roulement passant par O. Reporter les points de division 1', 2', 3'… perpendiculairement sur cette droite afin d'obtenir les points A, B, C, …
18) Lorsque le cercle se déplace de 1/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point A, et le point P se retrouve en I, intersection de la circonférence de rayon R centrée en A avec la parallèle au chemin de roulement passant par 1.
19) Lorsque le cercle se déplace de 2/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point B et P se retrouve en II, intersection de la circonférence de rayon R centrée en B avec la parallèle au chemin de roulement passant par 2.
20) Répéter l'opération de manière similaire tout au long du déplacement du cercle.
21) Les points I, II, III, … sont les points de la cycloïde à relier.

La normale en un point V de la cycloïde est le segment V 5', si 5' est le point sur le chemin de roulement utilisé pour construire V. La tangente d'un point de la cycloïde est la perpendiculaire à la normale de ce point.
Exemple : La tangente r est dessinée au point V.



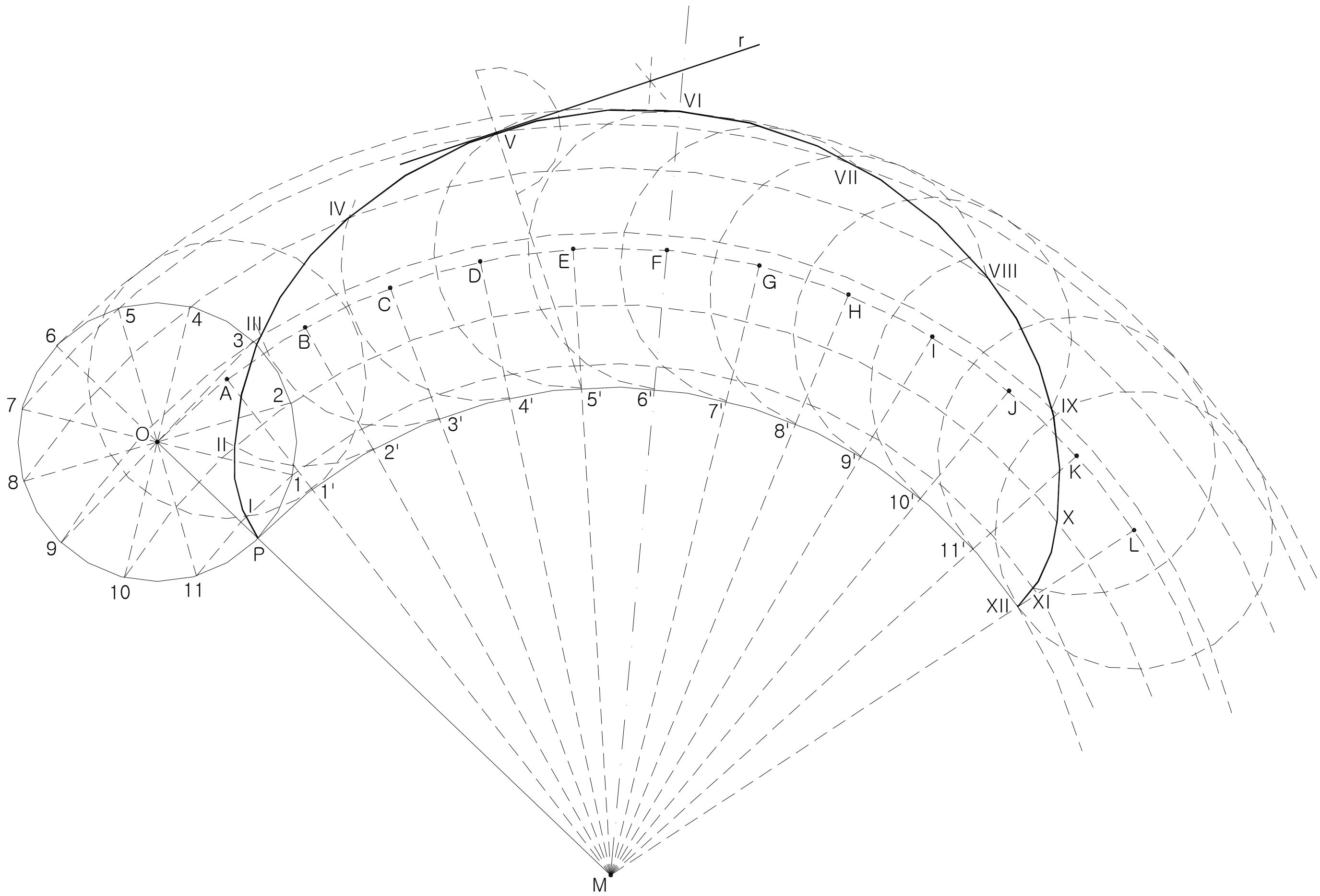
5h. L'épicycloïde

L'épicycloïde est la courbe plane engendrée par un point d'un cercle, appelé cercle générateur, qui roule extérieurement sur un autre cercle appelé cercle directeur (ou chemin de roulement).
Les éléments donnés sont : le cercle générateur de rayon R, le point P (point de contact au départ entre cercle générateur et directeur) et le cercle directeur (chemin de roulement) passant par le point P, de rayon R'.

Marche à suivre :

1) Diviser le cercle générateur en 12 parties égales et tracer les points de division 1, 2, 3,…
2) Sur le chemin de roulement, reporter, à partir de P, une longueur égale à celle de la circonférence du cercle générateur. L'angle de centre M se calcule comme suit : <M = 360°x R/R'. (On peut déterminer cette mesure par approximation en divisant le cercle générateur en 12 (par exemple) parties égales, puis, reporter ces parties sur le chemin de roulement).
3) Diviser l'angle M en 12 parties égales (même nombre que la division du cercle de roulement). Localiser les points 1', 2', 3',…
4) Par les points 1, 2, 3, …, tracer une série d'arcs de cercles concentriques de centre M (parallèles au chemin de roulement)
5) Tracer un arc de centre M passant par O, parallèle au chemin de roulement. Localiser les points A, B, C,… (points d'intersection entre cet arc et les prolongations de divisions du cercle directeur).
6) Lorsque le cercle se déplace de 1/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point A et P se retrouve en I, intersection de la circonférence de rayon R centrée en A avec le cercle concentrique (parallèle) au chemin de roulement passant par 1.
7) Lorsque le cercle se déplace de 2/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point B et P se retrouve en II, intersection de la circonférence de rayon R centrée en B avec le cercle concentrique (parallèle) au chemin de roulement passant par 2.
8) Répéter l'opération de manière similaire tout au long du déplacement du cercle.
9) Les points I, II, III, … sont les points de la cycloïde à relier.

La normale en un point V de l'épicycloïde est le segment V 5', si 5' est le point sur le chemin de roulement utilisé pour construire V. La tangente d'un point de l'épicycloïde est la perpendiculaire à la normale de ce point.
Exemple : La tangente r est dessinée au point V.



5i. L’hypocycloïde

L’hypocycloïde est la courbe plane engendrée par un point d’un cercle, appelé cercle générateur, qui roule intérieurement sur un autre cercle appelé cercle directeur (ou chemin de roulement).
Les éléments donnés sont : le cercle générateur de rayon R, le point P (point de contact au départ entre cercle générateur et directeur) et le cercle directeur (chemin de roulement) passant par le point P, de rayon R’.

Marche à suivre :

1) Diviser le cercle générateur en 12 parties égales et tracer les points de division 1, 2, 3,…
2) Sur le chemin de roulement, reporter, à partir de P, une longueur égale à celle de la circonférence du cercle générateur. L’angle de centre M se calcule comme suit : <M = 360°x R/R’. (On peut déterminer cette mes ure par approximation en divisant le cercle générateur en 12 (par exemple) parties égales, puis, reporter ces parties sur le chemin de roulement).
3) Diviser l’angle M en 12 parties égales (même nombre que la division du cercle de roulement). Localiser les points 1’, 2’, 3’,…
4) Par les points 1,2,3, …, tracer une série d’arcs de cercles concentriques de centre M (parallèles au chemin de roulement)
5) Tracer un arc de centre M passant par O, parallèle au chemin de roulement. Localiser les points A, B, C,… (points d’intersection entre cet arc et les prolongations de divisions du cercle directeur).
6) Lorsque le cercle se déplace de 1/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point A et P se retrouve en I, intersection de la circonférence de rayon R centrée en A avec le cercle concentrique (parallèle) au chemin de roulement passant par 1.
7) Lorsque le cercle se déplace de 2/12 de sa longueur sur le chemin de roulement, le centre du cercle devient le point B et P se retrouve en II, intersection de la circonférence de rayon R centrée en B avec le cercle concentrique (parallèle) au chemin de roulement passant par 2.
8) Répéter l’opération de manière similaire tout au long du déplacement du cercle.
9) Les points I, II, III, … sont les points de l’hypocycloïde à relier.

La normale en un point V de l’hypocycloïde est le segment V 5’, si 5’ est le point sur le chemin de roulement utilisé pour construire V. La tangente d’un point de l’hypocycloïde est la perpendiculaire à la normale de ce point.
Exemple : La tangente r est dessinée au point V.